Title	非線型Klein-Gordon方程式系の解の漸近挙動について (非線形波動および分散型方程式に関する研究)
Author(s)	砂川, 秀明
Citation	数理解析研究所講究録 (2004), 1355: 33-47
Issue Date	2004-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/25170
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1355 巻 2004 年 33-47

非線型 Klein-Gordon 方程式系の解の漸近挙動について*

大阪大学大学院理学研究科　砂川 秀明 (Hideaki Sunagawa)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

1　序

十分小さく滑らかなデータに対する, 非線型 Klein-Gordon 方程式系

$$(\Box + m_j^2)u_j = F_j(u, \partial u), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ j = 1, \cdots, N \tag{1.1}$$

の初期値問題を考える. ここで, $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$, $\partial = (\partial_t, \nabla_x)$, 未知函数 $u = (u_j)_{1\le j\le N}$ は実数値とし, m_j は正の定数, F_j は $(u, \partial u)$ に十分滑らかに依存し, ある整数 $p \ge 2$ に対して

$$F_j(u, \partial u) = \mathcal{O}(|u|^p + |\partial u|^p) \quad \text{near} \quad (u, \partial u) = (0, 0)$$

を満たすとする. 本稿では [7] に引き続き, $(F_j)_{1\le j\le N}$ の形状と $(m_j)_{1\le j\le N}$ の組み合わせに応じて (1.1) の解の長時間挙動がどのように影響を受けるかを問題にする. [7] では自由解に漸近する場合について考察したので, 本稿では主に自由解に漸近しない場合について論じたい.

1.1　背景など

本題に入る前に, 簡単に背景をまとめておく. [7] でも述べたように, 小さなデータを対象とする限り p が大きいほど非線型項の影響は小さいことが期待される. そして実際, $p > 1 + 2/n$ の場合には (1.1) の解は適当な意味で自由解に漸近することが知られている ($p > 1 + 2/n$ という条件は, エネルギー評価と減衰評価に基づいて素朴に解を評価しようとした時に現れる積分

$$\int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau^{n(p-1)/2}}$$

の収束に関係している). 従って, 本稿で興味があるのは $p \le 1 + 2/n$ の場合である. 説明の都合上, 以下では空間1次元で3次の非線型項を持つ Klein-Gordon 方程式系

$$\begin{cases} (\Box + m^2)u = F(v, \partial v), \\ (\Box + \mu^2)v = G(u, \partial u), \end{cases} \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

(F, G は3次) に話を限る. (1.2) について, 次の事実が知られている:

---

*本稿は, 2003 年 5 月 27 日に京都大学数理解析研究所短期共同研究「非線形波動および分散型方程式に関する研究」で講演した内容に, 若干の補足を加えたものである.

<u>主張</u>: $(m-\mu)(3m-\mu)(m-3\mu) \neq 0$ ならば (1.2) の解は自由解と同じ漸近形を持つ.

(詳細については [6] を参照のこと. 尚, [10], [2], [3] でも関連する結果が得られている.) この主張に現れる $(m-\mu)(3m-\mu)(m-3\mu) \neq 0$ という条件は何なのか? かなり雑な説明になってしまうが, ここでは次のように理解しよう. よく知られているように, 自由な Klein-Gordon 方程式 $(\Box + m^2)u = 0$ の解 u は

$$u(t,x) \sim \mathrm{Re}\left[\frac{e^{im\psi(t,x)}}{m\sqrt{t}} a(x/t)\right] + o(t^{-1/2}), \quad t \to \infty$$

($\psi(t,x) = (t^2 - |x|^2)_+^{1/2}$, a は初期値から決まる適当な函数) という漸近形を持つので, 例えば $G = \beta u^3$ の場合, (1.2) の第 2 式右辺は

$$\begin{aligned} G(u) \sim & \frac{e^{i3m\psi(t,x)}}{t} \frac{\beta}{8m^3 t^{1/2}} (a(x/t))^3 + \frac{e^{im\psi(t,x)}}{t} \frac{3\beta}{8m^3 t^{1/2}} |a(x/t)|^2 a(x/t) \\ & + (\text{conjugate quantities}) + (\text{remainder terms}) \end{aligned}$$

$(t \to \infty)$ という形をしていることが期待される. このことを念頭に置きながら (1.2) の解を丁寧に評価していくと, 大雑把に言って,

$$\int_1^\infty \frac{e^{i\omega\tau}}{\tau} d\tau$$

$(\omega = 3m - \mu,\ m - \mu, \cdots)$ のような量が現れる. 先に述べた条件 $(m-\mu)(3m-\mu)(m-3\mu) \neq 0$ は, この積分が収束する為の条件 $\omega \neq 0$ に対応している.

さて, ここで常微分方程式との類推† を考えてみると, $(m-\mu)(3m-\mu)(m-3\mu) = 0$ の場合には, (1.2) の解の長時間挙動が自由解の挙動とは大きく異なっても不思議ではない気がしてくる. 以上のことを念頭において, 本題に入ろう.

1.2 主結果

以下, 本稿の主結果を述べる. 証明の原理を明確にしたいので, 最も単純な例

$$(1.3) \qquad \begin{cases} (\Box + m^2)u = \alpha v^4, & \\ (\Box + \mu^2)v = \beta u^3, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ (u, v, \partial_t u, \partial_t v)\big|_{t=0} = (\varepsilon u_0, \varepsilon v_0, \varepsilon u_1, \varepsilon v_1), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

に話を限って議論を進める. 但し m, μ は正の定数, α, β は実定数, $\varepsilon > 0$ は小さなパラメーター, $u_0, v_0, u_1, v_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. 以下に述べる主結果は, $\mu = m$ または $\mu = 3m$ の場合と $\mu \neq m$ かつ $\mu \neq 3m$ の場合とで時刻無限大における解の振舞いの定性が大きく異なることを主張するものである.

---

†例えば, 常微分方程式 $(\frac{d^2}{dt^2} + \mu^2)v = \cos mt$ について, $m = \mu$ または $m = -\mu$ の場合に永年項が現れること思い浮かべて欲しい.

定理 1 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して (1.3) の時間大域的な古典解 (u, v) が一意に存在し, $t \to \infty$ のとき $x \in \mathbb{R}$ に関して一様に次が成り立つ:

$$u(t,x) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{im(t^2-|x|^2)_+^{1/2}}}{m\sqrt{t}}a(x/t)\right] + \mathcal{O}(t^{-1+\delta}),$$
$$v(t,x) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\mu(t^2-|x|^2)_+^{1/2}}}{\mu\sqrt{t}}\Big\{A(x/t)\log t + b(x/t)\Big\}\right] + \mathcal{O}(t^{-1+\delta}).$$

ここで, $i = \sqrt{-1}$, δ は任意に小さい正の数, $(\cdot)_+$ は $\max\{\cdot, 0\}$ を表す. また, $a(y)$, $b(y)$ は $\mathbb{C}$ に値を取る滑らかな函数で, $|y| \geq 1$ のとき $a(y) = b(y) = 0$ となるものである (これらは初期値から決まる). 更に, $A(y)$ は次式で与えられる:

$$A(y) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{i8m^3}(1-|y|^2)_+^{1/2}a(y)^3 & \mathit{if} \quad \mu = 3m, \\ \dfrac{3\beta}{i8m^3}(1-|y|^2)_+^{1/2}|a(y)|^2 a(y) & \mathit{if} \quad \mu = m, \\ 0 & \mathit{if} \quad \mu \neq 3m, \mu \neq m. \end{cases}$$

注意 上の結果を, 空間 1 次元で 3 次の非線型項を持つ単独非線型 Klein-Gordon 方程式

$$(\square + 1)w = \gamma w^3, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

の場合と比較してみよう. Delort [1] により, w は次の漸近形を持つことが示されている:

$$w(t,x) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}e^{i\{(t^2-|x|^2)_+^{1/2} + \varphi(x/t)\log t\}}a(x/t)\right] + \mathcal{O}(t^{-1+\delta}), \quad t \to \infty,$$

但し

$$\varphi(y) = -\frac{3\gamma}{8}(1-|y|^2)_+^{1/2}|a(y)|^2.$$

これから分かるように, (1.4) の場合には解の phase に非線型性の影響が現れているのに対し, (1.3) の場合には解の amplitude に非線型性の影響が現れている. 直観的には, (1.4) では非線型項が potential のように働き, 一方で (1.3) の場合には非線型項が外力のように働いているためと考えることができる.

2 証明の概略

本節では, いくつかの段階に分けて定理 1 の証明の概要を述べる.

2.1 Step 1

まず始めに, [1], [2] のアイデアに従って変数変換を行う. 以下, $B>0$ を十分大きく取って, 原点を中心とする半径 B の閉球に初期値の台が含まれるようにする. また, $\rho_0 > \max\{1, 2B\}$ を固定しておく. このとき, 次の事実が知られている:

Fact: $\{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+1} : (t+2B)^2-|x|^2=\rho_0^2,\ t>0\}$ を初期面と見なしてよい.

(この事実は, 時間局所解の存在定理と有限伝播性より従う. 詳細については[1] の命題 1.4 を参照のこと.) 次に, 領域 $\{(t,x) : (t+2B)^2-|x|^2>\rho_0^2,\ t>0\}$ で,

$$t+2B=\rho\cosh\theta,\ x=\rho\sinh\theta$$

によって座標変換 $(t,x)\mapsto(\rho,\theta)$ を行う (このとき, $\rho=\sqrt{(t+2B)^2-|x|^2}>\rho_0$). 更に, κ を適当な正の数として,

$$u(t,x)=\frac{\tilde{u}(\rho,\theta)}{\rho^{1/2}\cosh\kappa\theta},\quad v(t,x)=\frac{\tilde{v}(\rho,\theta)}{\rho^{1/2}\cosh\kappa\theta},$$

によって新しい未知函数 $(\tilde{u},\tilde{v})$ を導入する. 粗く言って $(\cosh\kappa\theta)^{-1}\approx\left(\left(1-|x/t|\right)_+ +1/t\right)^{\kappa/2}$ であるから, κ は光錐の外部 $\{|x|>t\}$ で解を減衰させる働きをするものと考えればいい (本稿の目的の為には $\kappa>3$ にとれば十分). 今, (u,v) が (1.3) を満たすとすると,

$$(\Box+m^2)u=\rho^{-1/2}(\cosh\kappa\theta)^{-1}(\tilde{\Box}+m^2)\tilde{u}$$

および

$$v^4=\rho^{-2}(\cosh\kappa\theta)^{-4}\tilde{v}^4$$

から

$$(\tilde{\Box}+m^2)\tilde{u}=\frac{\alpha}{\rho^{3/2}(\cosh\kappa\theta)^3}\tilde{v}^4$$

が得られる. 但し

$$\tilde{\Box}=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{2\kappa\tanh\kappa\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{1}{4}+\kappa^2\left(1-2(\tanh\kappa\theta)^2\right)\right).$$

同様に $\tilde{v}$ は

$$(\tilde{\Box}+\mu^2)\tilde{v}=\frac{\beta}{\rho(\cosh\kappa\theta)^2}\tilde{u}^3$$

を満たす. 以上をまとめると, (1.3) は次の Cauchy 問題に帰着される:

$$\text{(2.1)}\qquad \begin{cases} (\tilde{\Box}+m^2)\tilde{u}=\dfrac{\alpha}{\rho^{3/2}(\cosh\kappa\theta)^3}\tilde{v}^4, & \\ & \rho>\rho_0,\ \theta\in\mathbb{R}, \\ (\tilde{\Box}+\mu^2)\tilde{v}=\dfrac{\beta}{\rho(\cosh\kappa\theta)^2}\tilde{u}^3, & \\ (\tilde{u},\tilde{v},\partial_\rho\tilde{u},\partial_\rho\tilde{v})\Big|_{\rho=\rho_0}=(\varepsilon\tilde{u}_0,\varepsilon\tilde{v}_0,\varepsilon\tilde{u}_1,\varepsilon\tilde{v}_1), & \theta\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

ここで, 以後の証明の方針について簡単にまとめておく. 次のステップでは (2.1) の解の存在を示すとともに, $\rho \to \infty$ における $(\tilde{u}, \tilde{v})$ の増大度を評価する. 次に, その評価をもとに $\rho \to \infty$ における $(\tilde{u}, \tilde{v})$ の漸近形を求める. 最後に元の座標に戻って整理すれば所要の結果に到達する. 要するに, (2.1) の解の挙動を調べることで (1.3) の解の挙動が分かるのである.

2.2 Step 2

ここでの目標は以下の補題を示すことである. なお, 以下では H^s を通常の Sobolev 空間とする ($s \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$).

補題 2 $\kappa \geq 0$ とし, $\sigma \in \mathbb{N}$ は $\sigma \geq 1 + 4\kappa$ を満たすとする. 任意の $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1), (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1) \in H^{2\sigma}(\mathbb{R}_\theta) \times H^{2\sigma-1}(\mathbb{R}_\theta)$ に対してある $\varepsilon_0 > 0$ が存在し, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ ならば (2.1) の解

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \bigcap_{j=0}^{1} C^j(\rho_0, \infty; H^{2\sigma-j}(\mathbb{R}_\theta)) \times \bigcap_{j=0}^{1} C^j(\rho_0, \infty; H^{2\sigma-j}(\mathbb{R}_\theta))$$

が存在する. 更に, 各 $0 \leq j \leq \sigma - 1$ と $0 \leq \ell_1 + \ell_2 \leq 1$ に対して次の評価が成り立つ：

$$\|\partial_\rho^{\ell_1} \partial_\theta^{j+\ell_2} \tilde{u}(\rho, \cdot)\|_{H^\sigma} \leq C\rho^{\frac{j}{4}+\ell_2},$$
$$\|\partial_\rho^{\ell_1} \partial_\theta^{j+\ell_2} \tilde{v}(\rho, \cdot)\|_{H^\sigma} \leq C\rho^{\delta+\frac{j}{4}+\ell_2}.$$

(δ は任意に小さい正の数, C は ρ によらない定数.)

注意. これより特に, 任意の $\rho \geq \rho_0$ に対して

$$\|\tilde{u}(\rho, \cdot)\|_{H^\sigma} \leq C, \quad \|\tilde{v}(\rho, \cdot)\|_{H^\sigma} \leq C\rho^\delta. \tag{2.2}$$

補題 2 の証明: 適当な函数空間で縮小写像の原理を用いることによって示そう. そのためにまず, 滑らかな函数 $\phi(\rho, \theta)$ と正の数 M に対して

$$\|\phi(\rho)\|_{E_M} := \left(\int_{\theta \in \mathbb{R}} |\partial_\rho \phi(\rho, \theta)|^2 + \frac{1}{\rho^2} |\partial_\theta \phi(\rho, \theta)|^2 + M^2 |\phi(\rho, \theta)|^2 d\theta \right)^{1/2}$$

と書くことにして, 以下の不等式を用意する.

補題 3 ϕ を $(\rho,\theta)\in[\rho_0,\infty[\times\mathbb{R}$ の滑らかな函数とし, $\kappa\geq 0$, $M>0$, $\nu\geq 0$, $s_1,s_2\in\mathbb{N}_0$ とする. $s_1\geq 4\kappa$ ならば, 次の不等式が成り立つ:

$$\sup_{\rho\geq\rho_0}\Big(\sum_{j_1=0}^{s_1}\sum_{j_2=0}^{s_2}\rho^{-(\nu+j_1/4)}\big\|\partial_\theta^{j_1+j_2}\phi(\rho)\big\|_{E_M}\Big)\leq C\Big(\|\phi(\rho_0)\|_{H^{s_1+s_2+1}}+\|\partial_\rho\phi(\rho_0)\|_{H^{s_1+s_2}}\Big)$$
$$+C\sum_{j_1=0}^{s_1}\sum_{j_2=0}^{s_2}\int_{\rho_0}^{\infty}\rho^{-(\nu+j_1/4)}\|\partial_\theta^{j_1+j_2}(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\|_{L^2(\mathbb{R}_\theta)}d\rho.$$

ここで, C は ν, ρ_0 によらない正の定数.

ひとまずこの補題を認めて補題 2 を導く. $\delta\in]0,1/10]$, $\sigma\geq 1+4\kappa$ として,

$$\begin{aligned}Y^{\sigma,\delta}:=\Big\{&\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2)\in C^0(\rho_0,\infty;H^{2\sigma}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2))\cap C^1(\rho_0,\infty;H^{2\sigma-1}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)):\\ &0\leq^\forall j\leq 2\sigma-1,\ ^\exists C_j>0\ \text{s.t.}\\ &\|\partial_\theta^j\phi_1(\rho)\|_{E_m}\leq C_j\rho^{\frac14(j-\sigma)_+},\ \|\partial_\theta^j\phi_2(\rho)\|_{E_\mu}\leq C_j\rho^{\delta+\frac14(j-\sigma)_+}\Big\},\end{aligned}$$

$$\|\boldsymbol{\phi}\|_{Y^{\sigma,\delta}}:=\sup_{\rho\geq\rho_0}\sum_{j_1=0}^{\sigma-1}\sum_{j_2=0}^{\sigma}\Big(\rho^{-j_1/4}\big\|\partial_\theta^{j_1+j_2}\phi_1(\rho)\big\|_{E_m}+\rho^{-(\delta+j_1/4)}\big\|\partial_\theta^{j_1+j_2}\phi_2(\rho)\big\|_{E_\mu}\Big)$$

によって Banach 空間 $(Y^{\sigma,\delta},\|\cdot\|_{Y^{\sigma,\delta}})$ を導入し, その閉部分集合 $Y^{\sigma,\delta}(r)$ を

$$Y^{\sigma,\delta}(r):=\big\{\boldsymbol{\phi}\in Y^{\sigma,\delta}:\|\boldsymbol{\phi}\|_{Y^{\sigma,\delta}}\leq r\big\}$$

によって定める. また, $\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2)\in Y^{\sigma,\delta}$ に対して Cauchy 問題

$$\begin{cases}(\tilde{\Box}+m^2)\psi_1=\dfrac{\alpha}{\rho^{3/2}(\cosh\kappa\theta)^3}\phi_2^4, & \\ & \rho>\rho_0,\ \theta\in\mathbb{R},\\ (\tilde{\Box}+\mu^2)\psi_2=\dfrac{\beta}{\rho(\cosh\kappa\theta)^2}\phi_1^3, & \\ (\psi_1,\psi_2,\partial_\rho\psi_1,\partial_\rho\psi_2)\big|_{\rho=\rho_0}=(\varepsilon\tilde{u_0},\varepsilon\tilde{v_0},\varepsilon\tilde{u_1},\varepsilon\tilde{v_1}), & \theta\in\mathbb{R}\end{cases}$$

の解 $\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\psi_2)$ を $S(\boldsymbol{\phi})$ と記す. 以下, $\varepsilon_0>0$ と $r>0$ を適当にとれば, $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$ のとき S が $Y^{\sigma,\delta}(r)$ 上の縮小写像になることを示す. なお, 以後の評価に表れる定数は, 特に明示する必要がない限りすべて同じ文字 C で表すことにする.

まず, $\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2)\in Y^{\sigma,\delta}(r)$ に対して, 補題 3 より

$$\|S(\boldsymbol{\phi})\|_{Y^{\sigma,\delta}}\leq C\varepsilon+C\int_{\rho_0}^{\infty}G(\rho)d\rho,$$

$$G(\rho)=\sum_{j_1=0}^{\sigma-1}\sum_{j_2=0}^{\sigma}\Big(\rho^{-(\delta+1+j_1/4)}\big\|\partial_\theta^{j_1+j_2}\{\phi_1(\rho)^3\}\big\|_{L^2(\mathbb{R}_\theta)}+\rho^{-(3/2+j_1/4)}\big\|\partial_\theta^{j_1+j_2}\{\phi_2(\rho)^4\}\big\|_{L^2(\mathbb{R}_\theta)}\Big)$$

が成り立つ. $[(j_1+j_2)/2]+1 \le [\sigma-1/2]+1=\sigma$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\left\|\partial_\theta^{j_1+j_2}\{\phi_1(\rho)^3\}\right\|_{L^2} &\le C\|\phi_1(\rho)\|^2_{W^{[(j_1+j_2)/2],\infty}} \sum_{\ell=0}^{j_1+j_2} \|\partial_\theta^\ell \phi_1(\rho)\|_{L^2} \\ &\le C\|\phi_1(\rho)\|^2_{H^\sigma} \sum_{\ell=0}^{j_1+j_2} r\rho^{\frac{1}{4}(\ell-j_2)_+} \\ &\le Cr^3\rho^{j_1/4}\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\left\|\partial_\theta^{j_1+j_2}\{\phi_2(\rho)^4\}\right\|_{L^2} &\le C\|\phi_2(\rho)\|^3_{H^\sigma} \sum_{\ell=0}^{j_1+j_2} r\rho^{\delta+\frac{1}{4}(\ell-j_2)_+} \\ &\le Cr^4\rho^{4\delta+j_1/4}\end{aligned}$$

という評価ができるから, 以上をあわせて

$$\begin{aligned}\|S(\boldsymbol{\phi})\|_{Y^{\sigma,\delta}} &\le C\varepsilon + C\int_{\rho_0}^\infty r^3\rho^{-(1+\delta)} + r^4\rho^{-(3/2-4\delta)}d\rho \\ &\le C\varepsilon + C(1+r)r^3\int_{\rho_0}^\infty \rho^{-(1+\delta)}d\rho \\ &\le C\varepsilon + C(1+r)r^3/\delta\end{aligned}$$

を得る (ここで, $\delta \le 1/10$ より $1+\delta \le 3/2-4\delta$ であることを用いた). よって, $r>0$ を $C(1+r)r^2 \le \delta/2$ を満たすように十分小さく取り, $\varepsilon_0 := r/2C$ とおくと, ${}^\forall\varepsilon \le \varepsilon_0$ に対して

$$\|S(\boldsymbol{\phi})\|_{Y^{\sigma,\delta}} \le r.$$

同様にして, $r>0$ を十分小さく選べば, 任意の $\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2), \boldsymbol{\phi}'=(\phi_1',\phi_2') \in Y^{\sigma,\delta}(r)$ に対して

$$\|S(\boldsymbol{\phi})-S(\boldsymbol{\phi}')\|_{Y^{\sigma,\delta}} \le \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\phi}'\|_{Y^{\sigma,\delta}}$$

となることを示すことができる. 従って S は $Y^{\sigma,\delta}(r)$ 上の縮小写像であるから, 不動点定理により主張が従う. ∎

2.3 Step 3

まず,

$$L = \rho^2(\partial_\rho^2 - \tilde{\Box}) = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2(\tanh\kappa\theta)\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{4} - \kappa^2 + 2\kappa^2(\tanh\kappa\theta)^2$$

とおくと, (2.1) は

$$\begin{cases} (\partial_\rho^2 + m^2)\tilde{u} = \dfrac{1}{\rho^{3/2-4\delta}} R_1, \\ (\partial_\rho^2 + \mu^2)\tilde{v} = \dfrac{\beta}{\rho(\cosh\kappa\theta)^2}\tilde{v}^3 + \dfrac{1}{\rho^{2-\delta}} R_2, \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{\alpha}{(\cosh\kappa\theta)^3}\left(\rho^{-\delta}\tilde{v}\right)^4 + \frac{1}{\rho^{1/2+4\delta}} L\tilde{u}, \quad R_2 = \rho^{-\delta} L\tilde{v}$$

と書き換えられる. ここで, (2.2) と Sobolev の埋め込みから

$$\sup_{\rho\geq\rho_0}\Big(\|R_1(\rho,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\theta)} + \|R_2(\rho,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\theta)}\Big) < \infty$$

が成り立つことに注意する. さて,

$$\tilde{a}_\pm = e^{\mp im\rho}(m \mp i\partial_\rho)\tilde{u}, \quad \tilde{b}_\pm = e^{\mp i\mu\rho}(\mu \mp i\partial_\rho)\tilde{v}$$

とおいて, これらの $\rho\to\infty$ における漸近形を調べよう. まず

$$\frac{\partial\tilde{a}_\pm}{\partial\rho}(\rho,\theta) = \frac{\pm e^{\mp im\rho}}{i\rho^{3/2-4\delta}} R_1(\rho,\theta)$$

であるから,

$$\tilde{a}_\pm^\infty(\theta) = e^{\mp im\rho_0}\big\{m\tilde{u}_0(\theta) \mp i\tilde{u}_1(\theta)\big\} + \int_{\rho_0}^\infty \frac{\pm e^{\mp im\tau}}{i\tau^{3/2-4\delta}} R_1(\tau,\theta)d\tau$$

とおくと

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\pm(\rho,\theta) &= \tilde{a}_\pm(\rho_0,\theta) + \int_{\rho_0}^\rho \partial_\rho\tilde{a}_\pm(\tau,\theta)d\tau \\ &= \tilde{a}_\pm^\infty(\theta) - \int_\rho^\infty \frac{\pm e^{\mp im\tau}}{i\tau^{3/2-4\delta}} R_1(\tau,\theta)d\tau \\ &= \tilde{a}_\pm^\infty(\theta) + \mathcal{O}(\rho^{-1/2+4\delta}) \qquad (\rho\to\infty) \end{aligned}$$

を得る. 次に $\tilde{b}_\pm$ については

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{b}_\pm}{\partial\rho} &= \frac{\pm e^{\mp i\mu\rho}\beta}{i\rho(\cosh\kappa\theta)^2}\left(\frac{e^{+im\rho}\tilde{a}_+ + e^{-im\rho}\tilde{a}_-}{2m}\right)^3 + \frac{\pm e^{\mp i\mu\rho}}{i\rho^{2-\delta}} R_2 \\ &= \frac{\pm\beta}{i8m^3(\cosh\kappa\theta)^2}\sum_{\ell=0}^{3}\begin{pmatrix}3\\ \ell\end{pmatrix}\frac{e^{i\{(3-2\ell)m\mp\mu\}\rho}}{\rho}(\tilde{a}_+)^{3-\ell}(\tilde{a}_-)^\ell + \frac{\pm e^{\mp i\mu\rho}}{i\rho^{2-\delta}} R_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

となるが, 右辺第 1 項が $\mathcal{O}(\rho^{-1})$ である為に, 素朴に積分したのでは具合が悪い. そこで, 次の補題を用意する.

補題 4 $\psi_j(\rho,\theta)$ $(j=1,2,\cdots,N)$ は

$$|\psi_j(\rho,\theta)|\le C,\quad |\partial_\rho\psi_j(\rho,\theta)|\le C\rho^{-\nu}$$

を満たすとする. このとき

$$\frac{e^{i\omega\rho}}{\rho}\prod_{j=1}^{N}\psi_j(\rho,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\Big\{\dfrac{e^{i\omega\rho}}{i\omega\rho}\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\psi_j(\rho,\theta)\Big\}+\mathcal{O}\left(\rho^{-\min\{2,1+\nu\}}\right) & \textit{if}\quad \omega\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\rho}\Big\{(\log\rho)\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\psi_j(\rho,\theta)\Big\}+\mathcal{O}\left(\rho^{-\nu}\log\rho\right) & \textit{if}\quad \omega=0\end{cases}$$

証明:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Big\{\frac{e^{i\omega\rho}}{i\omega\rho}\prod_{j=1}^{N}\psi_j\Big\}=\frac{e^{i\omega\rho}}{\rho}\prod_{j=1}^{N}\psi_j+\frac{e^{i\omega\rho}}{i\omega}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\prod_{j=1}^{N}\psi_j\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Big\{(\log\rho)\prod_{j=1}^{N}\psi_j\Big\}=\frac{1}{\rho}\prod_{j=1}^{N}\psi_j+(\log\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\prod_{j=1}^{N}\psi_j\Big)$$

より直ちに従う. ∎

この補題より, (2.3) は

$$\partial_\rho(\tilde{b}_\pm-\Phi_\pm)=\Psi_\pm$$

と書き換えられる. 但し

$$\Phi_+(\rho,\theta)=\begin{cases}\dfrac{\beta\big\{\tilde{a}_+(\rho,\theta)\big\}^3}{i8m^3(\cosh\kappa\theta)^2}\log\rho+\mathcal{O}(\rho^{-1}) & \text{if}\quad \mu=3m,\\[2ex] \dfrac{3\beta\big\{\tilde{a}_+(\rho,\theta)\big\}^2\tilde{a}_-(\rho,\theta)}{i8m^3(\cosh\kappa\theta)^2}\log\rho+\mathcal{O}(\rho^{-1}) & \text{if}\quad \mu=m,\\[2ex] \mathcal{O}(\rho^{-1}) & \text{if}\quad \mu\neq 3m,\ \mu\neq m,\end{cases}$$

$$\Psi_+(\rho,\theta)=\begin{cases}\mathcal{O}(\rho^{-3/2+4\delta}\log\rho) & \text{if}\quad \mu=3m\ \text{ or }\ \mu=m,\\[2ex] \mathcal{O}(\rho^{-2+\delta}) & \text{if}\quad \mu\neq 3m,\ \mu\neq m,\end{cases}$$

$$\Phi_-(\rho,\theta)=\overline{\Phi_+(\rho,\theta)},\quad \Psi_-(\rho,\theta)=\overline{\Psi_+(\rho,\theta)}.$$

よって, 先と同様に

$$\tilde{b}_\pm^\infty(\theta)=e^{\mp i\mu\rho_0}\big\{\mu\tilde{v}_0(\theta)\mp i\tilde{v}_1(\theta)\big\}-\Phi_\pm(\rho_0,\theta)+\int_{\rho_0}^{\infty}\Psi_\pm(\tau,\theta)d\tau$$

とおいて

$$\tilde{b}_\pm(\rho,\theta) = \begin{cases} \pm\dfrac{\beta}{i8m^3}\dfrac{\{\tilde{a}_\pm^\infty(\theta)\}^3}{(\cosh\kappa\theta)^2}\log\rho + \tilde{b}_\pm^\infty(\theta) + \mathcal{O}(\rho^{-1/2+4\delta}\log\rho) & \text{if} \quad \mu = 3m, \\ \pm\dfrac{3\beta}{i8m^3}\dfrac{|\tilde{a}_\mp^\infty(\theta)|^2\tilde{a}_\pm^\infty(\theta)}{(\cosh\kappa\theta)^2}\log\rho + \tilde{b}_\pm^\infty(\theta) + \mathcal{O}(\rho^{-1/2+4\delta}\log\rho) & \text{if} \quad \mu = m, \\ \tilde{b}_\pm^\infty(\theta) + \mathcal{O}(\rho^{-1+\delta}) & \text{if} \quad \mu \neq 3m, \ \mu \neq m \end{cases}$$

(as $\rho \to \infty$) を得る．あとは，

$$u(t,x) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{im\rho}}{m\sqrt{\rho}}\frac{\tilde{a}_+(\rho,\theta)}{\cosh\kappa\theta}\right], \quad v(t,x) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\mu\rho}}{\mu\sqrt{\rho}}\frac{\tilde{b}_+(\rho,\theta)}{\cosh\kappa\theta}\right],$$

$$\rho = \sqrt{(t+2B)^2 - |x|^2}, \quad \theta = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2B+t+x}{2B+t-x}\right),$$

($t \gg 1$, $|x| < t+2B$) を用いて整理すればよい．その際，

$$\begin{aligned} \frac{\rho^{-\nu}}{\cosh\kappa\theta} &\leq \frac{Ct^{-\nu}}{(\cosh\theta)^\kappa}\left(\frac{t+2B}{\rho}\right)^\nu \\ &= Ct^{-\nu}\left(1-|x/(t+2B)|^2\right)^{\kappa-\nu} \\ &\leq Ct^{-\nu} \end{aligned}$$

(if $\kappa \geq \nu \geq 0$) に注意せよ．詳細については [9] を参照のこと． ∎

3 エネルギー不等式について

本節では，前節で用いたエネルギー不等式 (補題 3) の証明について述べる．まず，基本となる次の評価から始めよう．

補題 5 $\kappa \geq 0$, $M > 0$, $s \in \mathbb{N}_0$ とする．滑らかな函数 $\phi(\rho,\theta)$ に対して，

(3.1)
$$\frac{d}{d\rho}\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}^2 \leq \frac{2\kappa}{\rho}\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}^2 + \frac{C}{\rho^2}\sum_{j=0}^{s}\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\|_{E_M}^2 + C\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}\left\|\partial_\theta^s(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_\theta)}$$

および

$$\frac{d}{d\rho}\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}^2 \leq \frac{C}{\rho^2}\sum_{j=0}^{s+1}\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\|_{E_M}^2 + C\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}\left\|\partial_\theta^s(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_\theta)} \tag{3.2}$$

が成り立つ．ここで C は κ, M, s のみに依存する正の定数．

補題 5 の証明: 直接計算により

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho}\|\phi(\rho)\|_{E_M}^2 =&2\int_{\mathbb{R}}(\partial_\rho\phi)(\partial_\rho^2\phi)+\frac{1}{\rho^2}(\partial_\theta\phi)(\partial_\rho\partial_\theta\phi)+M^2\phi(\partial_\rho\phi)-\frac{1}{\rho^3}|\partial_\theta\phi|^2d\theta\\ \le&2\int_{\mathbb{R}}(\partial_\rho\phi)\left(\partial_\rho^2\phi-\frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2\phi+M^2\phi\right)d\theta\\ =&2\int_{\mathbb{R}}\frac{-2\kappa\tanh(\kappa\theta)}{\rho^2}(\partial_\rho\phi)(\partial_\theta\phi)\\ &-\frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{1}{4}+\kappa^2-2\kappa^2\tanh^2(\kappa\theta)\right\}\phi(\partial_\rho\phi)+(\partial_\rho\phi)(\tilde{\Box}+M^2)\phi d\theta\\ \le&\frac{4\kappa}{\rho^2}\int_{\mathbb{R}}|\partial_\rho\phi||\partial_\theta\phi|d\theta+\frac{C}{\rho^2}\|\phi(\rho)\|_{E_M}^2+C\|\phi(\rho)\|_{E_M}\left\|(\tilde{\Box}+M^2)\phi\right\|_{L^2(\mathbb{R}_\theta)}\end{aligned}$$

となり, この右辺第 1 項が

$$\frac{2\kappa}{\rho}\|\phi(\rho)\|_{E_M}^2 \quad \text{および} \quad \frac{2\kappa}{\rho^2}\left(\|\phi(\rho)\|_{E_M}^2+\frac{1}{M^2}\|\partial_\theta\phi(\rho)\|_{E_M}^2\right)$$

で抑えられることを用いると, $(3.1)_{s=0}$ および $(3.2)_{s=0}$ がそれぞれ得られる.

次に $s\ge 1$ の場合を考える. $(3.1)_{s=0}$ において ϕ を $\partial_\theta^s\phi$ に置き換えれば,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho}\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}^2\le&\frac{C_*}{\rho}\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}^2+\frac{C}{\rho^2}\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}^2+C\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}\left\|\partial_\theta^s(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_\theta)}\\ &+C\|\partial_\theta^s\phi(\rho)\|_{E_M}\left\|\left[(\tilde{\Box}+M^2),\partial_\theta^s\right]\phi(\rho)\right\|_{L^2(\mathbb{R}_\theta)}\end{aligned}$$

が成り立つ. 一方, 交換関係

$$[\tilde{\Box}+M^2,\partial_\theta^s]=\frac{1}{\rho^2}\sum_{j=0}^{s}\gamma_{j,s}(\theta)\partial_\theta^j \tag{3.3}$$

($\gamma_{j,s}(\theta)$ は $\|\gamma_{j,s}\|_{L^\infty}<\infty$ を満たす適当な函数) により

$$\left\|\left[(\tilde{\Box}+M^2),\partial_\theta^s\right]\phi(\rho,\cdot)\right\|_{L^2}\le\frac{1}{\rho^2}\sum_{j=0}^{s}\|\gamma_{j,s}\|_{L^\infty}\|\partial_\theta^j\phi(\rho,\cdot)\|_{L^2}\le\frac{C}{\rho^2}\sum_{j=0}^{s}\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\|_{E_M}$$

となるから, 両者を併せると (3.1) が従う. (3.2) についても同様. ∎

補題 3 の証明: まず,

$$\mathcal{E}_s(\rho):=\left(\sum_{j=0}^{s}\rho^{-(2\nu+j/2)}\left\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\right\|_{E_M}^2\right)^{1/2}$$

とおくと, ある定数 $C_s\ge 1$ が存在して

$$C_s^{-1}\mathcal{E}_s(\rho)\le\sum_{j=0}^{s}\rho^{-(\nu+j/4)}\left\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\right\|_{E_M}\le C_s\mathcal{E}_s(\rho)$$

が成り立つことに注意する. 直接計算により

$$\frac{d}{d\rho}\mathcal{E}_{s_1}(\rho)^2 = \sum_{j=0}^{s_1}\left\{\rho^{-(2\nu+j/2)}\frac{d}{d\rho}\left\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\right\|_{E_M}^2 - (2\nu+j/2)\rho^{-(2\nu+j/2)-1}\left\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\right\|_{E_M}^2\right\}$$
$$\le \sum_{j=0}^{s_1-1}\rho^{-(2\nu+j/2)}\frac{d}{d\rho}\left\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\right\|_{E_M}^2 + \rho^{-(2\nu+s_1/2)}\frac{d}{d\rho}\left\|\partial_\theta^{s_1}\phi(\rho)\right\|_{E_M}^2$$
$$- (2\nu+s_1/2)\rho^{-(2\nu+s_1/2)-1}\left\|\partial_\theta^{s_1}\phi(\rho)\right\|_{E_M}^2$$

となるので, この右辺に補題 5 および関係式 $-(2\nu+s_1/2) \le -2\kappa$ を用いると

$$2\mathcal{E}_{s_1}(\rho)\frac{d\mathcal{E}_{s_1}}{d\rho}(\rho)$$
$$\le \sum_{j=0}^{s_1-1}\rho^{-(2\nu+j/2)}\left\{\frac{C}{\rho^2}\sum_{\ell=0}^{j+1}\|\partial_\theta^\ell\phi(\rho)\|_{E_M}^2 + C\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\|_{E_M}\left\|\partial_\theta^j(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\right\|_{L^2}\right\}$$
$$+ \rho^{-(2\nu+s_1/2)}\left\{\frac{2\kappa}{\rho}\|\partial_\theta^{s_1}\phi(\rho)\|_{E_M}^2 + \frac{C}{\rho^2}\sum_{\ell=0}^{s_1}\|\partial_\theta^\ell\phi(\rho)\|_{E_M}^2 + C\|\partial_\theta^{s_1}\phi(\rho)\|_{E_M}\left\|\partial_\theta^{s_1}(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\right\|_{L^2}\right\}$$
$$- 2\kappa\rho^{-(2\nu+s_1/2)-1}\|\partial_\theta^{s_1}\phi(\rho)\|_{E_M}^2$$
$$= \frac{C}{\rho^2}\left\{\sum_{j=0}^{s_1-1}\sum_{\ell=0}^{j+1}\rho^{-(2\nu+j/2)}\|\partial_\theta^\ell\phi(\rho)\|_{E_M}^2 + \sum_{\ell=0}^{s_1}\rho^{-(2\nu+s_1/2)}\|\partial_\theta^\ell\phi(\rho)\|_{E_M}^2\right\}$$
$$+ C\sum_{j=0}^{s_1}\rho^{-(2\nu+j/2)}C\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\|_{E_M}\left\|\partial_\theta^j(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\right\|_{L^2}$$

$(=: I_1 + I_2)$

を得る. 以下, I_1, I_2 を各々評価する. I_1 については,

$$\sum_{j=0}^{s_1-1}\sum_{\ell=0}^{j+1}\rho^{-(2\nu+j/2)}\|\partial_\theta^\ell\phi(\rho)\|_{E_M}^2 \le \sum_{\ell=0}^{s_1}\sum_{j=(\ell-1)_+}^{s_1-1}\rho^{-\{2\nu+(\ell-1)/2\}}\|\partial_\theta^\ell\phi(\rho)\|_{E_M}^2$$
$$\le s_1\rho^{1/2}\sum_{\ell=0}^{s_1}\rho^{-(2\nu+\ell/2)}\|\partial_\theta^\ell\phi(\rho)\|_{E_M}^2$$

より

$$I_1 \le \frac{C}{\rho^{3/2}}\sum_{\ell=0}^{s_1}\rho^{-(2\nu+\ell/2)}\|\partial_\theta^\ell\phi(\rho)\|_{E_M}^2 \le \frac{C}{\rho^{3/2}}\mathcal{E}_{s_1}(\rho)^2.$$

I_2 については, Schwarz の不等式より

$$I_2 \le C\left\{\sum_{j=0}^{s_1}\rho^{-(2\nu+j/2)}C\|\partial_\theta^j\phi(\rho)\|_{E_M}^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{j=0}^{s_1}\rho^{-(2\nu+j/2)}\left\|\partial_\theta^j(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\right\|_{L^2}^2\right\}^{1/2}$$
$$\le C\mathcal{E}_{s_1}(\rho)\sum_{j=0}^{s_1}\rho^{-(\nu+j/4)}\left\|\partial_\theta^j(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\right\|_{L^2}.$$

以上をまとめると

$$\frac{d\mathcal{E}_{s_1}}{d\rho}(\rho) \le \frac{C}{\rho^{3/2}}\mathcal{E}_{s_1}(\rho) + C\sum_{j=0}^{s_1}\rho^{-(\nu+j/4)}\left\|\partial_\theta^j(\tilde{\Box}+M^2)\phi(\rho)\right\|_{L^2}.$$

これより, $s_2 = 0$ の場合の所要の式が得られる. $s_2 \ge 1$ の場合は, 交換関係 (3.3) と Gronwall の補題より従う. ∎

4 諸注意

(I) 3つ以上連立する系についても同様の結果を得ることができる. 例えば $\gamma \in \mathbb{R}$, $F_j(u,\partial u) = O(|u|^4 + |\partial u|^4)$ $(1 \le j \le 4)$ として,

$$\begin{cases} (\Box + m_1^2)u_1 = F_1(u,\partial u), \\ (\Box + m_2^2)u_2 = F_2(u,\partial u), \\ (\Box + m_3^2)u_3 = F_3(u,\partial u), \\ (\Box + m_4^2)u_4 = \gamma u_1u_2u_3 + F_4(u,\partial u), \end{cases} \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$

の, 十分滑らかで小さなデータに対する初期値問題を考える. この場合, 解は時間大域的に一意に存在し, $t\to\infty$ のとき $x \in \mathbb{R}$ に関して一様に次が成り立つ:

$$u_j(t,x) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{im_j(t^2-|x|^2)_+^{1/2}}}{m_j\sqrt{t}}a_j(x/t)\right] + \mathcal{O}\left(t^{-1+\delta}\right), \quad j=1,2,3,$$

$$u_4(t,x) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{im_4(t^2-|x|^2)_+^{1/2}}}{m_4\sqrt{t}}\left\{A(x/t)\log t + a_4(x/t)\right\}\right] + \mathcal{O}\left(t^{-1+\delta}\right).$$

ここで, δ は任意に小さい正の数, a_j $(j=1,2,3)$ は先と同様, $A(y)$ は次式で与えられる:

$$A(y) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{i8m_1m_2m_3}(1-|y|^2)_+^{1/2} \displaystyle\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\Lambda} a_1^{(\lambda_1)}(y)a_2^{(\lambda_2)}(y)a_3^{(\lambda_3)}(y) & \text{if } \Lambda \ne \emptyset, \\ 0 & \text{if } \Lambda = \emptyset, \end{cases}$$

但し,

$$a_j^{(+1)}(y) = a_j(y), \quad a_j^{(-1)}(y) = \overline{a_j(y)},$$
$$\Lambda := \left\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \{\pm1\}^3 \;\middle|\; m_4 = \lambda_1m_1 + \lambda_2m_2 + \lambda_3m_3\right\}.$$

(II) 3次斉次同士が連立する場合, 例えば

$$\begin{cases} (\Box + m^2)u = \alpha v^3, \\ (\Box + \mu^2)v = \beta u^3, \end{cases} \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$

のような場合, にも主結果と同様の主張が成立することを期待したくなるが, 現段階ではその証明はできていない (少なくとも筆者には自明とは思えない). その一つの理由は, $\mathcal{O}(\rho^{-1}\log\rho)$ のような項を (少なくとも素朴には) 剰余項と見なせないことにある.

(III) 本稿では空間 1 次元の場合のみについて論じたが, 空間 2 次元の場合にも同様の議論が可能である. 詳細については [8], [9] を参照のこと. また, 2003 年 7 月に, 筆者のもとに以下の preprint が送られてきた：

> D. Fang and R. Xue, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for a resonant Klein-Gordon systems in two space dimensions.*

この中でも, 空間 2 次元の場合についての同様の問題が考察されている.

参考文献

[1] J.-M. Delort, *Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasi linéaire à données petites en dimension* 1. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^e série **34** (2001), 1–61.

[2] J.-M. Delort, D. Fang and R. Xue, *Global existence of small solutions for quadratic quasilinear Klein-Gordon systems in two space dimensions.* Prépublications Mathematiques de l'Université Paris 13, 2002-29.

[3] D. Fang and R. Xue, *Global existence of small solutions for cubic quasilinear Klein-Gordon systems in one space dimension.* preprint, 2003.

[4] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations.* Springer Verlag, Berlin, 1997.

[5] S. Klainerman, *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions.* Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 631–641.

[6] H. Sunagawa, *On global small amplitude solutions to systems of cubic nonlinear Klein-Gordon equations with different mass terms in one space dimension.* J. Diff. Equations **192** (2003), 308–325.

[7] H. Sunagawa, *Global small amplitude solutions to systems of nonlinear Klein-Gordon equations with several mass terms.* 京都大学数理解析研究所講究録 **1331** (2003), 71-83 (in Japanese).

[8] H. Sunagawa, *A note on the large time asymptotics for a system of Klein-Gordon equations.* Hokkaido Math. J. (to appear).

[9] H. Sunagawa, *Large time asymptotics of solutions to nonlinear Klein-Gordon systems.* preprint, 2003.

[10] Y. Tsutsumi, *Stability of constant equilibrium for the Maxwell-Higgs equations.* Funkcialaj Ekvacioj, **46** (2003), 41-62.